Etude d'une famille de fonctions

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie I - Solutions d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E):(1+x^2)y'+2xy=1/x$.

1.a Résoudre E sur $\mathbb{R}^+*$.

1.b Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}^+*$ par : $\forall x>0, f_\lambda(x)=\dfrac{\ln x+\lambda}{1+x^2}$ et on note (C_λ) sa courbe représentative dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit $M\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ un point du plan avec $\alpha>0$. Montrer que par M passe une et une seule courbe (C_λ).

2. La fonction f_λ est clairement indéfiniment dérivable. On se propose d'en étudier les variations.

2.a Montrer que, pour tout $x>0$, f_λ' est du signe de $g_\lambda(x)=1+x^2-2x^2(\ln x+\lambda)$.

2.b Etudier les variations de la fonction g_λ et observer en particulier que l'équation $g_\lambda(x)=0$ admet une et une solution sur $\mathbb{R}^+*$. Celle-ci sera notée m_λ.

2.c Etudier les limites de f_λ en 0 et en $+\infty$. Etablir $f_\lambda(m_\lambda)=\dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.

2.d Dresser le tableau de variation (complet) de f_λ.

3. Représenter sur un même graphique les courbes (C_{-1}), (C_0) et (C_1).
On donnera des valeurs approchées de m_{-1} et m_0 à 10^{-2} près en précisant la méthode utilisée.
On donnera la valeur exacte de m_1.

Partie II - Etude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F primitive sur $\mathbb{R}^+*$ s'annulant en 1 de f_0 i.e. la fonction définie par $\forall x>0, F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale (ce n'est pas pour embêter, c'est parce que ce n'est pas possible...)
La courbe représentative de F sera notée Γ.

1. Etudier les variations et le signe de F sur $\mathbb{R}^+*$.

2.a Pour $k\in\mathbb{N}$ et $x>0$, calculer : $I_k(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^{k+2}}\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} I_k(x)$.

2.b Etablir que, pour $x\geq 1$, $F(x)\leq I_0(x)\leq 1$.
La fonction F étant croissante et majorée, nous admettrons qu'elle admet une limite L.

2.c Etablir que $\forall x>0, F(x)=F(1/x)$. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=L$.
Nous admettrons que Γ admet une tangente verticale en 0.

3. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de L.

3.a Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x>0, \dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x^{2k+2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n+2}(1+x^2)}$.

3.b En déduire, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\geq 1$ la relation $F(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)+(-1)^{n-1}\int_1^x \frac{\ln t}{t^{2n+2}(1+t^2)}\mathrm{d}x$.

3.c Etablir, pour $x\geq 1$: $0\leq\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^{2n+2}(1+t^2)}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{(2n+3)^2}$.

3.d On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, |L - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.

3.e Donner, en détaillant la méthode utilisée, une valeur approchée à 10^{-2} près de L .

4. Donner l'allure du graphe de Γ .